Adaptive Netzverfeinerung und Erhöhung des Ansatzgrades bei Finite-Element-Verfahren

Ernst Rank

SIEMENS AG , Zentralbereich Forschung und Technik

Zusammenfassung :

Finite Element Verfahren können prinzipiell auf drei verschiedene Arten Konvergenz erreichen: durch fortgesetzte Verfeinerung des FE-Netzes (h-Version), durch Erhöhung des Polynomgrades der Ansatzfunktionen (p-Version) oder durch die Kombination aus diesen beiden Methoden (hp-Version). Neue Forschungsergebnisse zeigen, daß die hp-Version selbst bei Singularitäten in der exakten Lösung exponentielle Konvergenzordnung ermöglicht.

Es soll gezeigt werden, wie sich optimale Verfeinerungsstrategien in einem adaptiven FE-Code realisieren lassen und wie sich die theoretischen Aussagen numerisch bestätigen.

ADAPTIVE NETZVERFEINERUNG UND ERHÖHUNG DES ANSATZGRADES BEI FINITE-ELEMENT-VERFAHREN

ERNST RANK, SIEMENS AG, Zentralbereich Forschung und Technik

Die p-Version der FEM

Neue theoretische Untersuchungen /1/ haben aus der Sicht der klassischen FE-Theorie überraschende Ergebnisse über das Konvergenzverhalten der p-Version (Erhöhung des Polynomgrades der Ansatzfunktionen bei festgehaltenem Netz) geführt. Die wichtigsten Resultate seien kurz angeführt. Man betrachte dazu folgendes Modellproblem :

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \in \mathbb{R}^2, \quad u = u_0 \ \text{ auf } \Gamma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g_0 \ \text{ auf } \Gamma_2 \qquad (1)$$

Zunächst werde angenommen, daß die exakte Lösung analytisch sei. Dann gilt für den Fehler in der Energienorm :

$$\|e\|_E \leq C\, e^{-\alpha N(p)^{1/2}} \qquad p \longrightarrow \infty \qquad (2)$$

C und α sind positive Konstanten, N(p) die vom Polynomgrad p abhängige Zahl von Freiheitsgraden.

In der Nähe von Ecken oder Punkten wechsender Randbedingungen hat die exakte Lösung von (1) in erster Näherung die Gestalt

$$u = u_0 + C\, r^{\lambda}\, g(\theta) \qquad (3)$$

u_0 ist eine glatte Funktion, r und θ am singulären Punkt zentrierte Polarkoordinaten. Für diesen Fall wurde in /1/ folgende Abschätzung gezeigt :

$$\|e\|_E \leq C\, N(p)^{\gamma}\ , \ \gamma = \gamma(\lambda) > 0\ , \ p \longrightarrow \infty \qquad (4)$$

Von entscheidender Bedeutung für die Konstruktion einer kombinierten Netzverfeinerung und Ansatzgraderhöhung (hp-Version) ist jedoch das präasymptotische Verhalten der p-Version im Falle einer exakten Lösung wie in (3). Dieses ist schematisch für drei Netze in den Bildern (1) und (2) dargestellt. Der Fehlerverlauf (2a) für Netz (1a) hat ein "inverses S-förmiges" Verhalten, d.h. exponentiellen präasymptotischen Charakter.

Die verfeinerten Netze (1b) und (1c) zeigen prinzipiell dasselbe Verhalten. Entscheidend ist nun, daß die Einhüllende der Konvergenzkurven für die sukzessive geometrisch verfeinerten Netze selbst exponentiell fällt. Der optimale geometrische Progressionsfaktor liegt unabhängig von λ bei 0.85, was zu einer sehr starken Verfeinerung auf die Singularität hin führt.

Das prinzipielle Konzept für eine optimale hp-Strategie kann damit formuliert werden. Globale exponentielle Konvergenz wird dadurch erreicht, daß in unkritischen Elementen, das sind solche, in denen die exakte Lösung analytisch ist, nur der Polynomgrad erhöht wird, kritische Elemente, also solche, die an singuläre Punkte der exakten Lösung angrenzen, werden geometrisch auf die Singularitäten hin verfeinert.

Der Algorithmus

Die Schwierigkeit bei der Konstruktion eines Algorithmus für die hp-Version liegt in der Frage, wie es gelingt, auf der Einhüllenden der Konvergenzkurve in Bild (2) zu bleiben. Dazu werden lokale Fehlerindikatoren λ_i und ein globaler Fehlerestimator μ wie in /2/ zur Schätzung des Fehleranteils im Element i bzw. des globalen Fehlers verwendet. Der Algorithmus für eine adaptive hp-Version stellt sich dann wie folgt dar.

Schritt 1 : Definiere ein grobes Basisnetz

Schritt 2 : Bestimme kritische und unkritische Elemente

Schritt 3 : Setze Polynomgrad p = 1 in jedem Element

Schritt 4 : Bestimme FE-Lösung und berechne Fehlerindikatoren und Estimatoren

Genauigkeit ausreichend : STOP

Schritt 5 : Für jedes Element :

Falls (Fehlerindikator > vorgegebene Schranke λ_{max}) dann

Falls (Element unkritisch)

erhöhe Polynomgrad um 1

Falls (Element kritisch)

verfeinere auf singulären Punkt zu

Schritt 6 : gehe nach Schritt 4.

Ein numerisches Beispiel

Als numerisches Beispiel sei Gleichung (1) auf dem in Bild (3) dargestellten Gebiet Ω betrachtet. An den leicht gezeichneten Randlinien ist Dirichlet-Bedingung, an den stark durchgezogenen Linien Neumann-Randbedingung gegeben. Es wurden 6 Verfeinerungsstrategien verglichen. HP1 ist die im letzten Abschnitt beschriebene hp-Version, wobei der Polynomgrad über dem Berechnungsnetz variieren konnte, HP2 wie HP1, aber mit konstantem Polynomgrad über dem Netz; P1 ist eine adaptive p-Version auf dem in Bild (3) dargestellten Netz, P2 die p-Version mit konstantem Polynomgrad über dem Netz. H1 ist eine adaptive h-Version mit Elementen vom Ansatzgrad 1, H2 eine gleichmäßige Netzverfeinerung. In Bild (4) ist das Konvergenzverhalten der Verfahren dargestellt. Die beiden hp-Versionen zeigen das erwünschte exponentielle Verhalten und führen zu extrem hoher Genauigkeit. HP1 erzielt mit ca. 500 Freiheitsgraden einen Fehler von etwa 0.1 % in der Energienorm.

Literatur

/1/ Guo,B., Babuska,I., The h-p version of the finite element method. Computational Mechanics I , 1986.

/2/ Rank,E., An adaptive hp-version in the finite element method,in : Proc. of the second conference on numerical methods in engineering: theory and applications, NUMETA 87, Swansea.

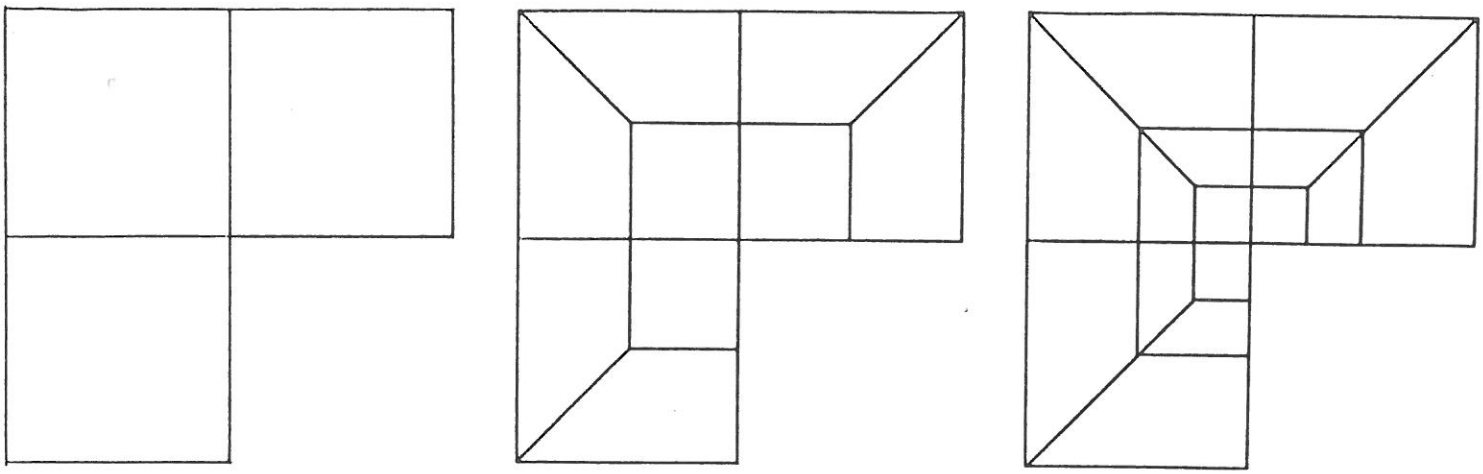

Bild 1 (a-c) : FE-Netze für die p-Version

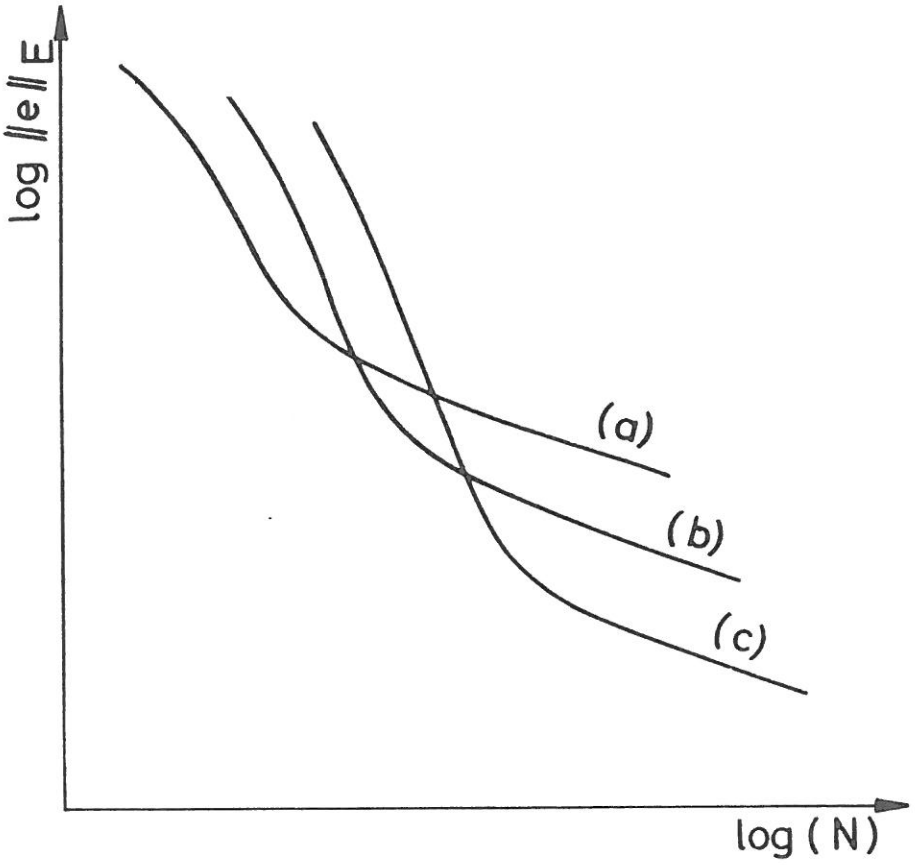

Bild 2 : Konvergenz der p-Version für Netze 1 (a-c)

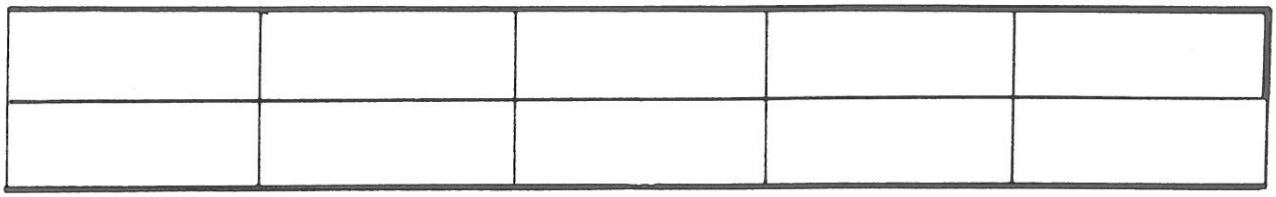

Bild 3 : Gebiet Ω mit FE-Netz

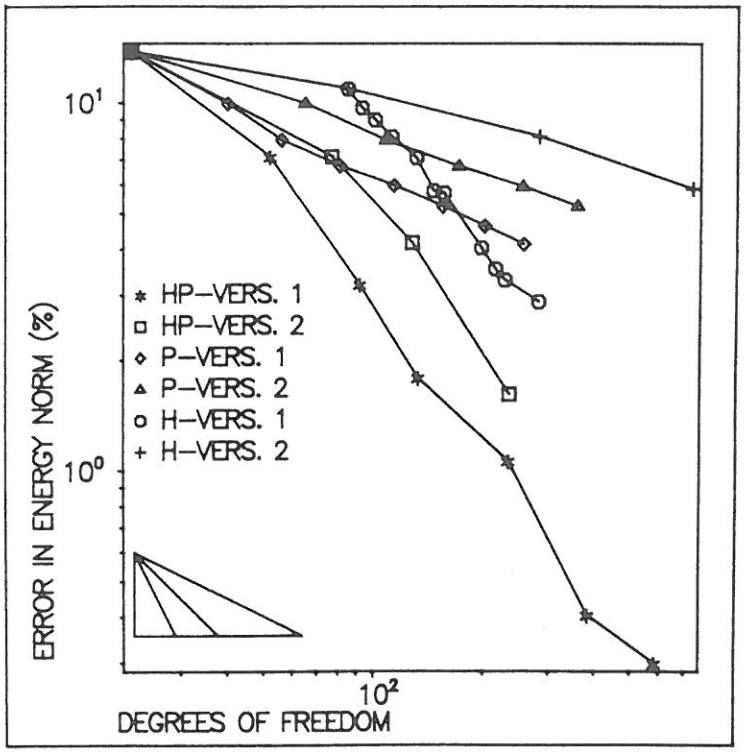

Bild 4 : Konvergenzverhalten verschiedener Verfeinerungsstrategien