E. RANK, R.KRAUSE

A-posteriori-Fehlerschätzung bei Multi-Skalen-Problemen

Es wird eine Variante der hp-Version vorgestellt, die in einer hierarchischen Gebietszerlegung die Verwendung geometrisch inkompatibler FE-Netze erlaubt. A priori und a posteriori Fehlerschätzungen werden skizziert. Es zeigt sich, daß eine adaptive Netzkonstruktion oftmals entkoppelt auf den unterschiedlichen Netzebenen durchgeführt werden kann.

1. Die hierarchische Gebietszerlegung

Aufgaben zur Lösung von Feldproblemen mit sehr unterschiedlichen Längenskalen spielen bei vielen technischen Anwendungen eine wesentliche Rolle. Erwähnt seien Tunnelberechnungen, bei denen das lokale Feld um den Tunnel möglichst detailliert erfaßt werden muß, physikalisch sinnvolle Randbedingungen oft aber erst in großer Entfernung gestellt werden können. Als weiteres Beispiel seien Temperaturfeld-Berechnungen in der Halbleitertechnik genannt, wo z.B. ein Leistungstransistor mit großer lokaler Wärmeentwicklung auf einem um einige Größenordnungen voluminöseren Kühlkörper angebracht wird. Zur Simulation dieser und ähnlicher lokal-globaler Probleme werden unter anderem Methoden zur Kopplung von Finiten Elementen und Randelementen eingesetzt [1]. Mit dem FE-Ansatz wird das lokale Feld gegebenenfalls nichtlinear berechnet, das Außenraumproblem wird mit Randelementen diskretisiert. Als Alternative soll hier ein Ansatz untersucht werden, der Nahfeld- und Fernfeldlösung in einer hierarchischen Überlagerung aus einer h- und einer p-Approximation koppelt. Die grundlegende Idee dieses Verfahrens wurde in [2,3] vorgestellt und ist eng verwandt mit der unabhängig entwickelten 's-Version' von Fish [4].

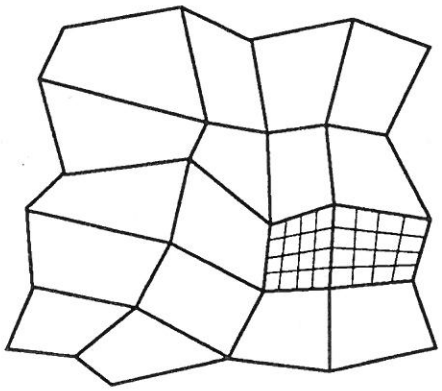

Abbildung 1: Geometrisch inkompatibles FE-Netz

Zur Erläuterung der Methode sei Bild 1 mit einem geometrisch inkompatiblen FE-Netz betrachtet. Wichtig ist hierbei, daß 'unter' dem lokalen feinen Netz Elemente des groben Netzes (hier zwei Viereckselemente) definiert sind. Es existiert also zunächst eine Triangulierung $T_1 = \{t_{1,i}, i \in I_1\}$ eines Gebiets Ω_1. Zur Konstruktion des Finite-Element-Raums werden auf T_1 stückweise stetige, auf jedem Element als Polynom der Ordnung p erklärte Funktionen angesetzt. Weiterhin wird eine Triangulierung T_2 auf einer Vereinigung von Elementen aus T_1 definiert. Es existiere dazu $I_{2,1} \subset I_1$ mit $\Omega_2 = \bigcup \{t_{1,i}, \ i \in I_{2,1}\}$ und es sei $T_2 = \{t_{2,i}, \ i \in I_2\}$ Triangulierung von Ω_2 so, daß es für jedes $t_{2,i} \in T_2$ ein $t_{1,i}$ gibt mit $t_{2,i} \subset t_{1,i}$. Mit S_{h,Ω_2} wird dann eine 'gewöhnliche' FE-Approximation mit z.B. elementweise bilinearen Ansätzen auf T_2 gewählt. Weiterhin sei :

$$S^0_{h,\Omega_2} := \{v \in S_{h,\Omega_2} \quad | \quad v = 0 \text{ auf } \Gamma_2\}$$

Zur Elimination linearer Abhängigkeiten zwischen dem p- und dem h-Ansatzraum wird

$$S^0_{p,\Omega_2} := S_{p,\Omega_1} \setminus S^0_{h,\Omega_2}$$

definiert. Der Ansatzraum des *hierarchischen Overlays* ist nun erklärt durch

$$S_{h,p} = S^{\circ}_{h,\Omega_2} \oplus S^{\circ}_{p,\Omega_1}$$

Jedes Element von $S_{h,p}$ ergibt sich als hierarchische Summe einer p- und einer h-Funktion, jedes $v = v_p + v_h \in S_{h,p}$ ist also wegen der *homogenen Randbedingungen* der h-Funktionen am geometrischen Übergang vom groben zum feinen Netz *per Konstruktion* stetig.

Zur Definition eines Randwertproblems sei eine Bilinearform $B(u,v)$ und ein lineares Lastfunktional $F(v)$ gegeben. In der üblichen Art und Weise wird nun die FE-Näherung bestimmt in der Lösung der schwach formulierten Aufgabe

$$B(u_{FE}, V) = f(V) \quad \forall V \in S_{h,p}$$

oder, unter Ausnutzung der hierarchische Struktur von $S_{h,p}$:

Gesucht ist $u_{FE} = u_h + u_p \in S_{h,p}$ so, daß für jedes $v_h,\ v_p \in S_{h,p}$

$$B(u_p + u_h,\ v_p) = f(v_p)$$

$$B(u_p + u_h,\ v_h) = f(v_h)$$

Das resultierende lineare Gleichungssystem spiegelt ebenfalls den hierarchischen Ansatz wieder :

$$\begin{pmatrix} A_{pp} & A_{ph} \\ A^t_{ph} & A_{hh} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ x_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_p \\ f_h \end{pmatrix}$$

Eine effektive Lösungsstrategie für dieses Gleichungssystem ohne eine explizite Berechnung des Koppelterms A_{ph} wird in Abschnitt 4 beschrieben.

2. A-priori-Fehlerabschätzung

Ziel dieses Abschnitts soll es sein, Aussagen über die lokale und die globale Güte des hierarchischen Ansatzes zu geben. Wir nehmen dazu an, daß das 'Nahfeld' Ω_2 hierbei so gewählt sei, daß die zu approximierende exakte Lösung u_{ex} von $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ *glatt* nach ganz Ω_1 zu einer Funktion $\tilde{u}_{ex}$ fortgesetzt werden kann, und daß gilt :

Es gibt eine Folge von p-Approximationen $\tilde{u}_p$ aus S_{p,Ω_1} mit

$$\|\tilde{u}_{ex} - \tilde{u}_p\|_{E(\Omega_1)} \leq C_1 N_p^{\alpha}$$

α soll dabei nur von der Glattheit der exakten Lösung in $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ abhängen, d.h. der Rand Γ_2 von Ω_2 muß 'weit genug' von singulären Punkten der lokalen Lösung entfernt sein. Sei nun $\tilde{u}_2 := u_{ex} - \tilde{u}_{ex}$. Dann ist $\tilde{u}_2|_{\Gamma_2} = 0$, d.h. $\tilde{u}_2$ kann mit den Funktionen des h-Ansatzraumes approximiert werden :

$$\|\tilde{u}_h - \tilde{u}_2\|_{E(\Omega_2)} \leq C_2 N_h^{\beta}$$

β hängt nun allein von der Glattheit der lokalen Lösung ab. N_p und N_h stellen hierbei die Anzahl der Freiheitsgrade der p- bzw. h-Approximation dar.

Mit der Dreiecksungleichung folgt dann :

$$\|\tilde{u}_p + \tilde{u}_h - u_{ex}\|_{E(\Omega_1)} \leq \|\tilde{u}_p - \tilde{u}_{ex}\|_{E(\Omega_1)} + \|\tilde{u}_h - \tilde{u}_2\|_{E(\Omega_2)} \leq C_1 N_p^{\alpha} + C_2 N_h^{\beta}.$$

$\tilde{u}_p + \tilde{u}_h$ ist nun aber aus dem Raum $S_{h,p}$ des hierarchischen hp-Overlays, damit folgt mit Céa's Lemma :

$$\|u_{FE} - u_{ex}\|_{E(\Omega_1)} = \|u_p + u_h - u_{ex}\|_{E(\Omega_1)} \leq C_1 N_p^{\alpha} + C_2 N_h^{\beta}$$

Also gilt :

Die Approximationsgüte des hierarchischen Overlays hängt nur von der Güte der p-Version in $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ und der h-Version in Ω_2 ab.

3. A posteriori Fehlerschätzung

Da von den hier betrachteten physikalischen Problemstellungen angenommen werden kann, daß eine adaptive Netzanpassung vor allem im Nahfeld Ω_2 sinnvoll ist, sollen folgende zwei Fragestellungen untersucht werden :

- Wie kann die Fehlerverteilung in Ω_2 geschätzt werden ?
- Wie kann das Netz in Ω_2 konstruiert werden , *ohne in jedem Adaptionszyklus das gekoppelte hierarchische System lösen zu müssen ?*

Wir nehmen dazu an, daß aus einer ersten Näherungsrechnung eine Lösung u_p bekannt sei. Für u_h gilt dann :

$$B(u_h, v_h) = f(v_h) - B(u_p, v_h) \qquad (*)$$

für alle $v_h \in S^o_{h,\Omega_2}$. Diese Bedingung stellt aber die Diskretisierung folgenden, auf dem *lokalen* Gebiet definierten Problems dar :

$$Gesucht \quad ist \quad u_1 \quad auf \quad \Omega_2, \quad u_1|_{\Gamma_2} = 0 \quad und \quad B(u_1, v) = \tilde{f}(v) := f(v) - B(u_p, v) \qquad (**)$$

für alle Funktionen v aus dem kontinuierlichen Testraum.

Die Lösung von (*) stellt nun jedoch eine 'gewöhnliche' FE-Approximation mit herkömmlichen Ansatzfunktionen an das Randwertproblem (**) dar, der Näherungsfehler von (*) gegenüber (**) kann also mit den bekannten a posteriori Fehleranalysen (z.B. [5]) geschätzt werden. Es bleibt die Frage zu untersuchen, in welchem Zusammenhang die kontinuierliche Lösung u_1 von (**) auf Ω_2 mit der dort eigentlich zu approximierenden Funktion u_{ex} steht. Wir betrachten dazu das auf Ω_2 eingeschänkte, exakte Randwertproblem

$$B(\hat{u}, v) = f(v) \quad mit \quad \hat{u} = u_{ex} \quad auf \quad \Gamma_2$$

und definieren $u_2 := \hat{u} - u_p$. Dann ist

$$B(u_2, v) = f(v) - B(u_p, v) \quad mit \quad u_2 = u_{ex} - u_p \quad auf \quad \Gamma_2 \quad (***)$$

Vergleichen wir (**) mit (***), so stellen wir fest, daß u_1 statt der exakten Randbedingung $u = u_{ex} - u_p$ die gestörte Randbedingung $u = 0$ erfüllt. In einem adaptiven Algorithmus ist also, neben der 'üblichen' Fehlerschätzung in Ω_2 diese Randstörung zu kontrollieren. Eine adaptive Netzanpassung in Ω_2 kann damit in folgenden Algorithmus durchgeführt werden:

1. Wähle Startnetz auf Ω_1 , Ω_2, Setze $i = 0, j = 0$
2. Löse gekoppeltes Problem für $u_h^{(i)}$, $u_p^{(j)}$
3. Betrachte *entkoppeltes* Teilproblem auf Ω_2 :

   $$B(u_h, v_h) = f(v_h) - B(u_p^{(i)}, v_h) \quad mit \quad u_h|_{\Gamma_2} = 0$$

   Erzeuge in einer adaptiven h-Verfeinerung Folge von Approximationen u_h
4. Setze $i = i + 1; j = j + 1$; Löse mit dem so konstruierten Netz für Ω_2 das gekoppelte System und bestimme $u_h^{(i)}$, $u_p^{(j)}$.
5. Falls Änderung von $u_p^{(j)}$ gegenüber $u_p^{(j-1)}$ auf Γ_2 unterhalb Fehlertoleranz : STOP , sonst GOTO 3.

4. Implementierung

Das in der Diskretisierung der gekoppelten lokal-globalen Approximation entstehende lineare Block-Gleichungssystem kann vorteilhaft in einer Block-Gauss-Seidel-Iteration gelöst werden. Die Koppelmatrizen A_{hp} bzw. A_{hp}^T werden dazu mit der jeweils vorherigen Iterierten als zusätzlichem Lastterm berücksichtigt:

$$A_{pp} x_p^{(n+1)} = f_p - A_{hp} \cdot x_h^{(n)}$$

$$A_{hh} x_h^{(n+1)} = f_h - A_{hp}^T \cdot x_p^{(n+1)}$$

Der Term $A_{hp} \cdot x_h^{(n)}$ kann hierbei als Lastfunktional aus einer negativer Vordehnung durch das Verschiebungsfeld $x_h^{(n)}$ aufgefaßt werden. Entsprechendes gilt für den Koppelterm in der zweiten Gleichung. Damit ist es nicht nötig, die Koppelmatrizen explizit zu berechnen, im Iterationsprozeß sind lediglich Dehnungen als Vordehnungen auf das jeweils andere FE-Netz zu interpolieren und dort als zusätzliche Last zu berücksichtigen.

5. Ein Beispiel

Bild 2 zeigt eine Scheibe mit einem geschraubten Anschluß an der rechten oberen Ecke. Die Last wird über Randspannungen an den Lochrändern eingebracht. Das globale Netz ist in Bild 3 dargestellt, Bild 4 zeigt einen vergrößerten Ausschnitt mit dem geometrisch inkompatiblen Overlay-Netz. Die im vorangehenden Anschnitt beschriebene Block-Iteration weist nach nur 3 Iterationsschritten eine Änderung in den Verschiebungen von weniger als einem Prozent auf. Das Gesamtverschiebungsfeld in dem vergrößerten Ausschnitt ist schließlich in Bild 5 dargestellt, wobei zu beachten ist, daß aus Darstellungsgründen jedes p-Element des Basisnetzes in 3 mal 3 Teilelemente zerlegt wurde.

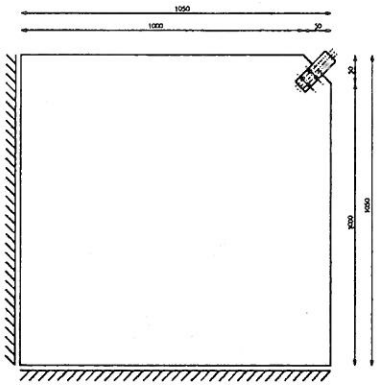

Abbildung 2: Strukturskizze

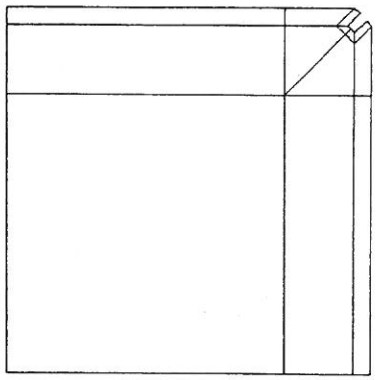

Abbildung 3: Globales Netz

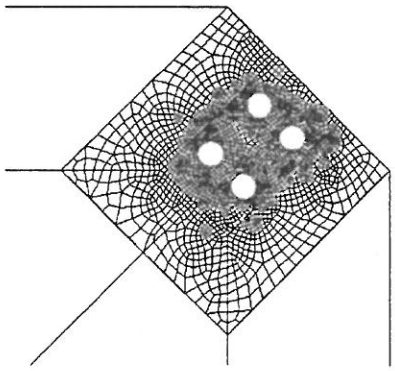

Abbildung 4: Lokal-globales Netz

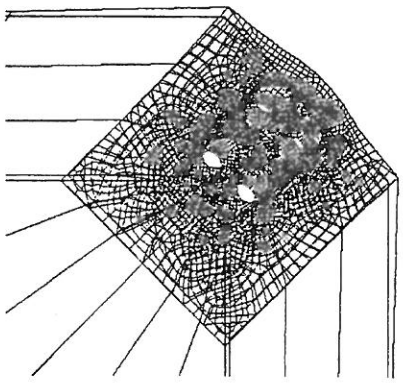

Abbildung 5: Verschobene Struktur

6. Literatur

1 JOHNSON,C., NEDELEC,J.C.: On the coupling of boundary integral and finite element methods. Math. comp. 35, 152, 1063-1079, 1980.

2 RANK E.: Adaptive remeshing and h-p domain decomposition. Comp. Meth. in Appl. Mech. Eng.,101: 299–31,1992

3 RANK E. : A zooming-technique using a hierarchical hp-version of the finite element method, in: Proc. of MAFELAP 1993, J. Whiteman (ed.), Uxbridge, April 1993

4 FISH J.: The s-version of the finite element method. Computers and Structures, 43 No. 3: 539-547,1992

5 I. BABUŠKA, A. MILLER: A posteriori error estimates and adaptive techniques for the finite element method, Univ. of Maryland, Inst f. Physic. Sci. and Technology, Tech. Note BN-968, 1981.

Anschrift: RANK, E., KRAUSE, R. Universität Dortmund, Fakultät Bauwesen, Numerische Methoden und Informationsverarbeitung,D-44221 Dortmund