# Netzadaption durch intelligentes Pre- und Postprocessing

Ernst Rank, Roland Krause, Manfred Schweingruber
*Numerische Methoden und Informationsverarbeitung, FB Bauwesen,*
*Universität Dortmund, Postfach 500 500, D-4600 Dortmund 50*

## 1 Einleitung

Die Netzgenerierung stellt einen zentralen Punkt jeder Finite-Elemente-Analyse dar. Das FE-Netz beeinflußt nicht nur unmittelbar die Aussagekräftigkeit und Genauigkeit der Berechnungsergebnisse, es steht vielmehr in direktem Zusammenhang zu Rechenzeit und Speicherplatzbedarf und damit zur Wirtschaftlichkeit der gesamten Berechnung. Während bis zu Beginn der achtziger Jahre vor allem die *kennwortbezogene Netzeingabe* mit nur beschränkten Generierungsmöglichkeiten verbreitet war, treten seither *halbautomatische Generatoren mit grafischer Benutzeroberfläche* in den Vordergrund. Die meisten dieser Generatoren basieren auf dem Prinzip der *Makroelemente*. Der Programmbenutzer verwendet diese einfachen Grundtypen von (im Falle von zweidimensionalen Berechnungen) drei- bis achteckigen Gebieten zu einer ersten Zerlegung der Struktur. Die Makroelemente werden dann, nach Angabe einer gewünschten Teilungszahl, automatisch in Dreiecks- oder Vierecksnetze zerlegt.

Viele in der Praxis verbreitete Netzgeneratoren zeigen jedoch bereits erhebliche Schwächen, wenn der Benutzer eine lokale Netzverfeinerung wünscht. So spiegeln die meisten FE-Netze eher die beschränkten Möglichkeiten des Präprozessors als die tatsächlichen Bedürfnisse einer problemgerechten Netzeinteilung wieder.

Parallel zur Einführung halbautomatischer Netzgeneratoren finden seit etwa 15 Jahren intensive Forschungsarbeiten auf dem Gebiet der vollautomatischen und *adaptiven Netzgenerierung* statt. Die adaptiven Methoden haben das Ziel, ein vorgegebenes Berechnungsgebiet nicht nur 'irgendwie', sondern möglichst optimal zu vernetzen, also größtmögliche Genauigkeit bei geringster Rechenzeit zu erreichen. Es ist offensichtlich, daß eine adaptive Vernetzung nicht alleine durch pure Geometrieinformation, also durch die Form des zu untersuchenden Systems gesteuert werden kann, sondern daß ebenso die *Belastung* und die *Lagerung* des Körpers eine Rolle spielen.

Aussagen über den Einfluß der beiden zuletzt genannten Kriterien auf die Rechengenauigkeit erhält man erst durch die FE-Berechnung selbst. Die grundsätzliche Idee der adaptiven

Verfahren ist damit äußerst einfach (Bild 1).

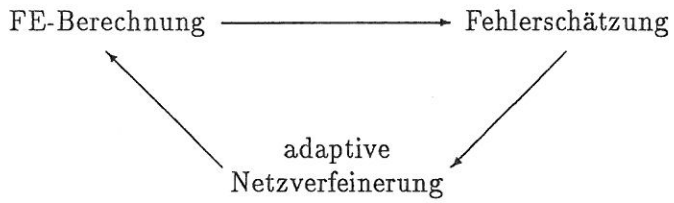


*Bild 1: Adaptiver Berechnungszyklus*

Nach einer ersten, auf einem groben Netz durchgeführten FE-Berechnung wird automatisch die Verteilung des Approximationsfehlers in einem noch näher zu definierenden Sinne geschätzt (*a-posteriori* Fehlerschätzung). Nach einer durch diese Schätzung gesteuerten, lokalen Netzverfeinerung wird eine erneute FE-Berechnung gestartet. Der Zyklus wird solange durchlaufen, bis eine gewünschte, vom Benutzer vorgegebene Genauigkeit erreicht ist.
Ein kritischer Punkt dieser adaptiven Verfeinerung ist offenbar eine zuverlässige Fehlerschätzung aus den Ergebnissen einer vorangegangenen FE-Berechnung. Die ersten auf einer gesicherten mathematischen Grundlage basierenden *a-posteriori* Fehlerschätzungen wurden 1978 von Babuska und Rheinboldt [1] für lineare, ebene Elastizitätsprobleme veröffentlicht. In der Folgezeit wurden diese Ergebnisse in einer Vielzahl von Forschungsarbeiten verallgemeinert und z.B. auf Plattenprobleme [2] und nichtlineare Potentialprobleme [3] übertragen. In jüngster Zeit wurden von Plank, Stein und Bischoff [4] bzw. Rust [5] auch Ergebnisse für lineare und nichtlineare Schalenprobleme veröffentlicht.
Allen diesen Vorschlägen ist gemeinsam, daß die adaptive FE-Berechnung sowohl in der Schätzung der Fehlerverteilung als auch in der eigentlichen Netzverfeinerung massive algorithmische und datentechnische Eingriffe in das eigentliche FE-Programm erfordert. Dies ist wohl der Hauptgrund, warum bisher - trotz aller unbestrittenen Vorteile - adaptive FE-Verfahren keinen breiteren Eingang in kommerziell verfügbare FE-Software gefunden haben. Lediglich einige der 'großen' Programmpakete (ANSYS, I-DEAS) verfügen derzeit über adaptive Verfeinerungsmöglichkeiten.
In den nächsten Abschnitten soll ein Ansatz geschildert werden, der in seinen Grundzügen von Zienkiewicz und Zhu [6] vorgestellt und u.a. in [7] analysiert wurde.
Dieser Ansatz kommt *ohne Eingriff* in das eigentliche FE-Programm aus und kann deshalb mit *jedem beliebigen* Programmsystem realisiert werden. Der in Bild 1 dargestellte Zyklus wird dadurch realisiert, daß die Fehlerschätzung in einem separaten Postprozessor-Modul durchgeführt wird, das als Ergebnis eine auf der Fehlerverteilung basierende Netzdichte über dem Berechnungsgebiet liefert. Ein intelligenter Netzgenerator erzeugt dann aus dieser Dichtefunktion ein neues, angepaßtes Netz, mit dem dann der eigentliche FE-Prozessor erneut gestartet wird.

Voraussetzung zur Realisierung dieser adaptiven Strategie ist eine Fehlerschätzung, die ausschließlich Daten im gewöhnlichen Ausgabeumfang eines FE-Programms verwendet. Dazu gehören neben den geometrischen Größen (Knotenkoordinaten, Elementlisten) und den Materialdaten die Ausgabe der Spannungen an den Integrationspunkten im Element, meist auch die geglätteten und ungeglätteten Spannungen an den Knoten. Diese Daten genügen, um für zweidimensionale, lineare Probleme der Elastizitätstheorie eine zuverlässige Fehlerschätzung durchzuführen.

## 2 Die Fehlerschätzung

An einem einfachen eindimensionalen Beispiel soll verdeutlicht werden, wie eine automatische Schätzung der Größe und der Verteilung des Berechnungsfehlers vorgenommen werden kann. Die Herleitung der Fehlerindikatoren ist ähnlich wie in [8], kommt aber im Gegensatz zur dort dargelegten Methode lediglich mit den üblicherweise einem FE-Postprozessor zur Verfügung stehenden Daten aus.
Man betrachte dazu einen Zugstab mit E-Modul $E$ und Querschnittsfläche $A$, bei $x = 0$ eingespannt und mit einer Streckenlast $p(x)$ belastet. Das System wird beschrieben durch

$$\begin{aligned} -EAu''(x) &= p(x) \\ u(0) &= 0 \\ u'(l) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Eine Finite-Elemente-Approximation

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} U_i H_i(x) \tag{2}$$

mit Knoten $x_i, i = 1, \ldots, n$, Knotenverschiebungen $U_i$ und Knotenansatzfunktionen $H_i$ weist einen Fehler

$$e(x) = U(x) - u(x) \tag{3}$$

auf. Es ist das Ziel einer *a-posteriori* Fehleranalyse, eine leicht berechenbare Näherung für $e(x)$ anzugeben. Man setze dazu den (unbekannten) Fehler $e$ in die Differentialgleichung (1) ein. Es ist dann

$$\begin{aligned} -EAe''(x) &= -EA\,(U''(x) - u''(x)) = \\ &= -EAU''(x) + EAu''(x) = \\ &= -EAU''(x) - p(x) \;=: r(x) \end{aligned} \tag{4}$$

*Nach* der FE-Berechnung ist $U$, damit auch $U''$ und somit die rechte Seite $r(x)$ bekannt. Formal ist der zu schätzende Fehler $e$ also die exakte Lösung zu einer gestörten Belastung

$r(x)$. (Siehe auch [9]).

Wenn nun angenommen wird, daß die FE-Näherung stückweise linear und somit an den Elementrändern zwar stetig, aber nicht stetig differenzierbar ist, so ist $U''(x)$ im Elementinneren Null; $EAU''(x)$ stellt am Knoten $x_i$ den Sprung $J(N_i)$ in der Normalkraft $N_i$ dar.

Im Element $[x_i, x_{i+1}]$ setzt sich die lokale Belastung der Fehlergleichung (4) also aus einer Streckenlast $p(x)$ und zwei Randlasten $\frac{1}{2}J(N_i)$ ,-$\frac{1}{2}J(N_{i+1})$ zusammen. Der Faktor $\frac{1}{2}$ vor den Normalkraftsprüngen resultiert aus der Aufteilung des gesamten Belastungssprungs auf die beiden beteiligten Elemente.

Da für die Fehlerschätzung eine mehr oder weniger grobe Approximation an $e$ genügt, soll die Fehlergleichung (4) vereinfacht werden. Dazu wird zunächst das Element $[x_i, x_{i+1}]$ mit der zugehörigen Belastung als *isoliertes* System betrachtet. Die Streckenlast $p(x)$ wird durch eine Gleichlast $\tilde{p}$ mit gleicher Resultierender approximiert. Außerdem wird der Ausdruck für die Normalkraftsprünge ersetzt. Dafür geht man von der Definition der Sprunghöhe

$$J(N_i) = N_{i,r} - N_{i,l} \tag{5}$$

aus, wobei $N_{i,r}$ die aus der FE-Näherung berechnete Normalkraft rechts von $x_i$ , $N_{i,l}$ diejenige links von $x_i$ darstellt.

Bezeichnet man nun mit

$$\overline{N}_i = \frac{1}{2}(N_{i,r} + N_{i,l}) \tag{6}$$

so folgt sofort

$$\frac{1}{2}J(N_i) = N_{i,r} - \overline{N}_i \tag{7}$$

bzw.

$$\frac{1}{2}J(N_{i+1}) = \overline{N}_{i+1} - N_{i+1,l} \tag{8}$$

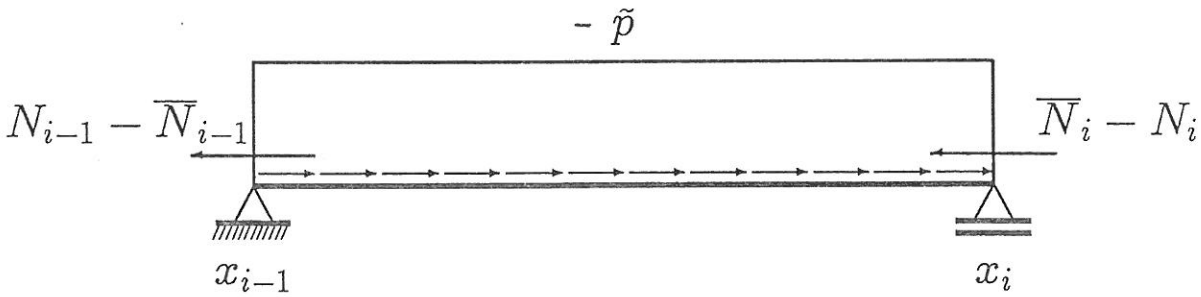


*Bild 2* :Teilsystem zur Fehlerschätzung

Für einen *genäherten* Fehler $\tilde{e}$ in Element $i$ ergibt sich also folgende Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} -EA\tilde{e}''(x) &= -\tilde{p} \\ \tilde{e}(x_i) &= 0 \\ -EA\tilde{e}'(x_i) &= N_{i,r} - \overline{N}_i \\ -EA\tilde{e}'(x_{i+1}) &= \overline{N}_{i+1} - N_{i+1,l} \end{aligned} \tag{9}$$

Die lokale Belastung an dem aus dem gesamten Stab isolierten Teilsystem ist in Bild 2 dargestellt.

Gl. (9) ist überbestimmt, da aber $\tilde{p}$ mit den Randlasten im Gleichgewicht steht, ist sie jedoch lösbar.

Es ergibt sich:

$$EA\tilde{e}'(x) = \frac{(N_{i+1} - \overline{N}_{i+1}) + (N_i - \overline{N}_i)}{l} x - (N_i - \overline{N}_i) \tag{10}$$

Die *Dehnungsenergie* des geschätzten Fehlers ist also für jedes Element berechenbar und wird als Fehlerindikator $\lambda_i$ mit der Definition

$$\lambda_i^2 := \int_{x_i}^{x_{i+1}} EA[\tilde{e}'(x)]^2 \, dx \tag{11}$$

bezeichnet.

Die Fehlerschätzung $\lambda_i$ läßt sich aus Daten bestimmen, die in jedem FE-Postprozessor zur Verfügung stehen, nämlich den *gemittelten* und *ungemittelten* Schnittgrößen im Element. Verallgemeinert auf zweidimensionale Strukturen lautet der Fehlerschätzer

$$\lambda_i^2 := \int_{\Omega_i} (\sigma_{\mathrm{FE}} - \overline{\sigma}_{\mathrm{FE}})(\varepsilon_{\mathrm{FE}} - \overline{\varepsilon}_{\mathrm{FE}}) \, d\Omega \tag{12}$$

mit den ungemittelten FE-Spannungen und -Dehnungen $\sigma_{\mathrm{FE}}$ bzw. $\varepsilon_{\mathrm{FE}}$ und den aus einer Spannungs- bzw. Dehnungsglättung hervorgegangenen Größen $\overline{\sigma}_{\mathrm{FE}}$ bzw. $\overline{\varepsilon}_{\mathrm{FE}}$ [6]. In [6] wird auch gezeigt, wie aus der Fehlerschätzung eine *Dichtefunktion* für ein optimiertes FE-Netz gewonnen werden kann.

## 3 Der Netzgenerator

Im ersten Teil dieses Abschnitts soll gezeigt werden, wie ein beliebig polygonal berandetes Gebiet $\Omega$ gleichmäßig, d.h. noch *ohne* Verwendung der Dichtefunktion, frei vernetzt werden kann. Der hierfür verwendete Netzgenerator benutzt die Idee der *fortlaufenden Gebietsabspaltung*, wie sie z.B. in Bank [10] oder [11] veröffentlicht wurde.

Das zu vernetzende Berechnungsgebiet wird durch eine Datenhierarchie

Knoten $\longleftarrow$ Kanten $\longleftarrow$ Regionen $\longleftarrow$ Berechnungsgebiet

beschrieben. Dabei ist eine *Region* ein einfach zusammenhängendes, polygonal berandetes Gebiet, dem *Materialeigenschaften* und *Flächenlasten* zugeordnet werden können.
Hat die zu vernetzende Struktur Löcher, so ist sie durch Aufschneiden in mehrere einfach zusammenhängende Bereiche zu zerlegen. (Siehe dazu Bild 3)

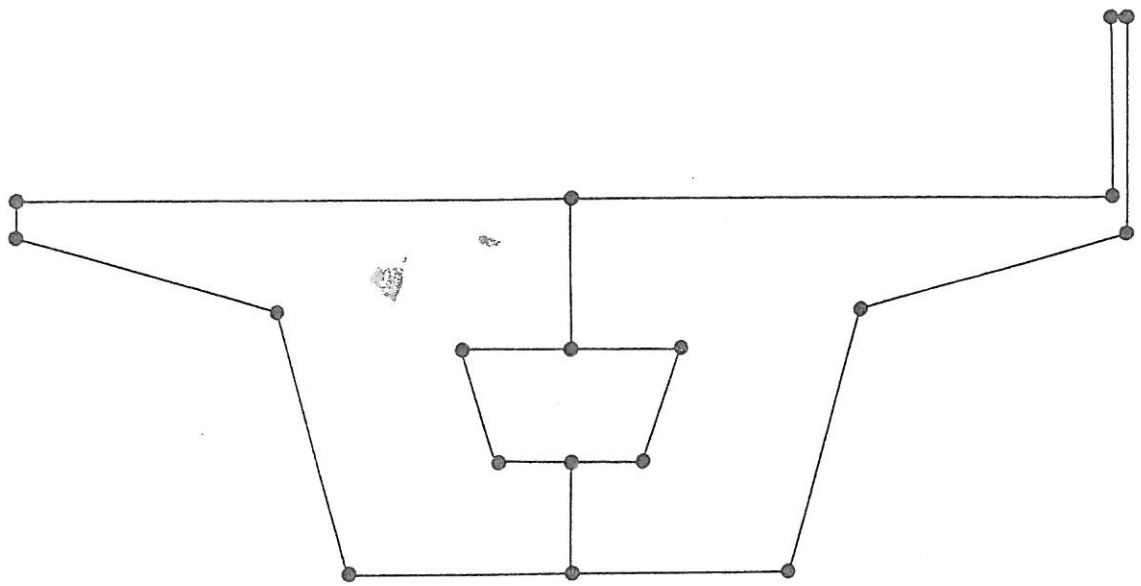

*Bild 3 :* Randbeschreibung eines Brückenquerschnitts

In einem ersten Schritt wird die Gesamtfläche $F$ des Gebiets $\Omega$ bestimmt. Aus der vom Benutzer einzugebenden gewünschten Zahl der Elemente $N$ wird die mittlere Elementfläche

$$\overline{F}_e = \frac{F}{N} \tag{13}$$

und daraus, unter der Annahme der Einteilung in (ideale) gleichseitige Dreiecke die mittlere Kantenlänge der Dreiecke

$$\overline{h}_e = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \cdot \overline{F}_e^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

berechnet.
$\overline{h}_e$ stellt damit den Abstand zweier Knoten in einem Netz aus $N$ gleichseitigen Dreiecken der Gesamtfläche $F$ dar.
Der eigentliche Generierungsalgorithmus vernetzt *rekursiv* die einzelnen Regionen. Zunächst werden dazu auf dem Rand der ersten Region Knoten im Abstand $\overline{h}_e$ generiert. Dann wird

versucht, die Region durch einen Schnitt so in zwei Teilgebiete zu zerlegen, daß die entstehenden Winkel möglichst wenig von 60° bzw. 120° abweichen. Auf der Schnittkante werden im Abstand $\overline{h}_e$ neue Knoten generiert. Eines der beiden Teilgebiete wird auf einen Stack gelegt, das andere als 'neue' Region 1 weiterbehandelt.
Durch fortlaufende Teilung entstehen so Regionen mit immer weniger Randknoten, die schließlich vollständig in Dreiecke zerfallen.
Zur *dichtefunktionsgesteuerten Netzeinteilung* im Prä-Postprozessor-Zyklus wird die Dichtefunktion $d_1(x)$ aus der geschätzten Fehlerverteilung abgeleitet und liegt damit auf einem ersten Finite-Elemente-Netz vor. Bevor sie zur Steuerung des Netzgenerators verwendet werden kann, ist sie noch geeignet anzupassen. Zunächst wird aus der elementweise konstanten Funktion $d_1$ (pro Element liegt *ein* Fehlerindikator vor) durch Glättung eine stetige Funktion $d_2(x)$ gewonnen. Es liegt nahe, dafür Knotenglättungsverfahren mit den üblichen linearen Elementansatzfunktionen zu verwenden. Zusätzlich soll die endgültige Dichtefunktion $d(x)$ einige *a-priori* Kriterien erfüllen. So ist es sinnvoll, das Verhältnis zwischen größtem und kleinstem Element zu beschränken. In den numerischen Beispielen wurde ein maximales Flächenverhältnis von 1:400 vorgegeben. Übertragen auf die Dichtefunktion bedeutet dies ein Beschneiden der Funktion nach oben bzw. unten auf den entsprechenden Maximal- bzw. Minimalwert. Schließlich darf auch die Größe benachbarter Elemente nicht zu sehr variieren, da sonst zwangsläufig Elemente mit unerwünscht spitzen Winkeln auftreten. Für die Dichtefunktion bedeutet dies, daß zu große Schwankungen zu vermeiden sind. Dazu werden, ausgehend vom Knoten mit der größten Netzdichte, alle Nachbarknoten untersucht und die vorgegebene Dichte bei Bedarf dort angepaßt. Das hierfür verwendete Kriterium ist ein geometrischer Progressionsfaktor, der das maximale Verhältnis der Durchmesser zweier benachbarter Elemente angibt.
Schließlich wird die Dichtefunktion $d(x)$ umgerechnet in eine *Abstandsfunktion* $h(x)$. Hierzu wird aus der Definition der Netzdichte

$$d(x) := \frac{\text{Zahl der Elemente in Kontrollfläche}}{\text{Kontrollfläche um Punkt } x} \tag{15}$$

aus der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks

$$F_e = \frac{\sqrt{3}}{4} h_e^2 \tag{16}$$

und aus der Beziehung

$$d(x) = \frac{1}{F_e(x)} \tag{17}$$

geschlossen

$$h_e(x) = \frac{\sqrt[4]{3}}{2} \cdot \frac{1}{d(x)} \tag{18}$$

Der dichtefunktionsgesteuerte Netzgenerator ergibt sich nun durch eine relativ einfache Modifikation des zu Beginn vorgestellten Algorithmus. Statt einer Knotengenerierung auf den Regionsrändern und an den Schnittkanten im Abstand $\overline{h}_e$ tritt nun die Generierung unter Verwendung des lokalen Abstands $h_e(x)$.

## 4 Ein Beispiel

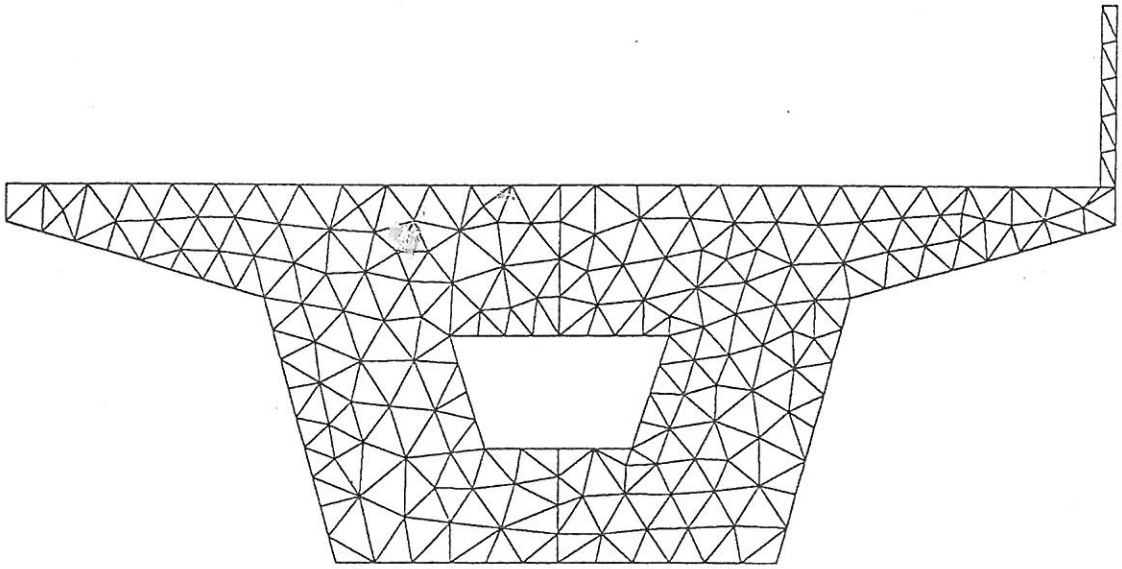

*Bild 4 :* Erstes FE-Netz

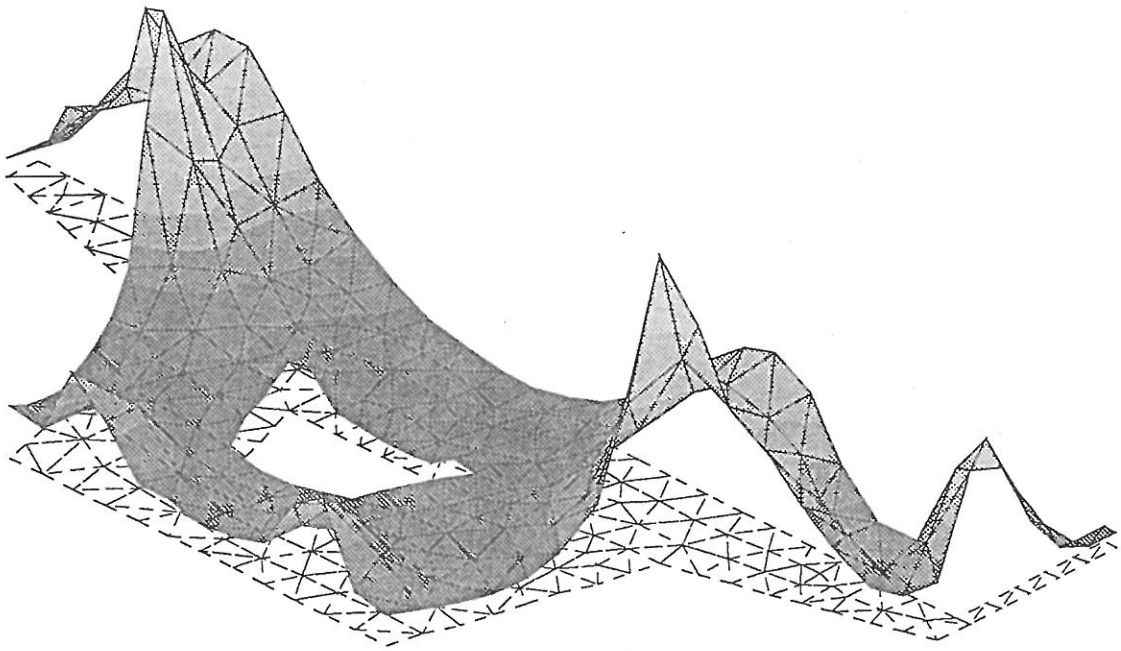

*Bild 5 :* Geschätzte Fehlerverteilung (1. Netz)

In Bild (3) wurde die aus CAD-Daten generierte Geometrie eines Brückenquerschnitts mit einer einseitig angebrachten Lärmschutzwand dargestellt. Als Belastung ist das Eigengewicht überlagert mit einer Windlast von rechts angesetzt. Bild (4) zeigt das erste Netz, in Bild (5) ist die Verteilung der Fehlerindikatoren im Schrägbild dargestellt. Dazu wurde, ähnlich wie im Abschnitt 3 für die Dichtefunktion $d_1(x)$ beschrieben, der zunächst unstetige Verlauf der Fehlerindikatoren zu einem stetigen, über jedem Element linearen Verlauf geglättet. Bild (6) zeigt das zweite, lokal verfeinerte FE- Netz und in Bild (7) ist die Verteilung der Fehlerindikatoren nach der zweiten Berechnung dargestellt. Dabei ist gegenüber Bild 5 eine Überhöhung um 75 % gewählt.

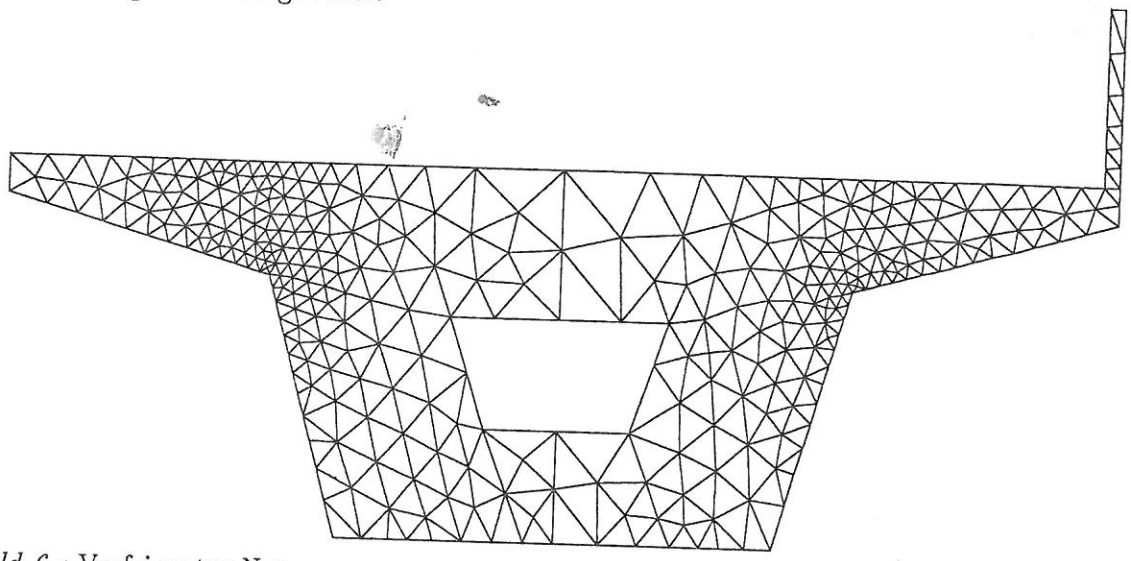

*Bild 6 :* Verfeinertes Netz

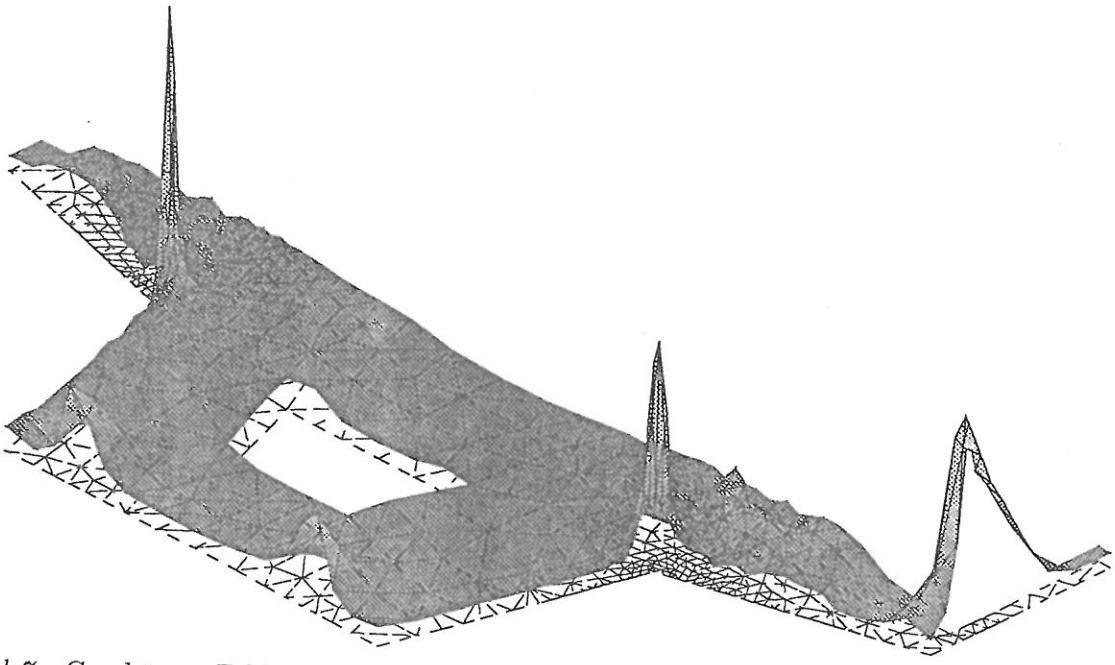

*Bild 7 :* Geschätzte Fehlerverteilung für 2. Netz

Zu beobachten ist, daß der geschätzte Fehler insgesamt wie erwartet kleiner geworden ist und daß sich insbesondere der Einfluß der Lösungssingularitäten an den einspringenden Ecken auf einen wesentlich kleineren Bereich beschränkt. Für praktische Berechnungen bedeutet dies, daß die Störung der Rechengenauigkeit nun nicht mehr bis an die in einem gewissen Anstand zu den Ecken liegenden Bemessungspunkten reicht.

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Es wurde gezeigt, wie sich allein aus den in jedem FE-Postprozessor zur Verfügung stehenden Daten ein Fehlerschätzungsmodul entwickeln läßt, das über eine Netzdichtefunktion einen Dreiecksnetzgenerator steuert.
Zu bemerken ist, daß diese Dichtefunktion auch aus anderen Daten erzeugt werden kann, z. B. durch eine grafische Benutzerinteraktion, bei der für die nach der Berechnung folgende Bemessung wesentliche Teilbereiche durch Belegen mit einer größeren Elementdichte feiner vernetzt werden können. Schließlich sei erwähnt, daß insbesondere bei Plattenberechnungen Dreiecksnetze wegen der schlechten Approximationseigenschaften gegenüber Vierecksnetzen nur zweite Wahl sind. In einer weiterführenden Arbeit [12] wird deshalb gezeigt, wie aus einem beliebigen Dreiecksnetz ein FE-Netz ausschließlich aus Viereckselementen erzeugt werden kann. Damit wird die Anwendbarkeit des adaptiven Prä-/Postprozessorzyklus weiter verallgemeinert.

## 6 Literaturverzeichnis

[1] BABUSKA, I., RHEINBOLDT, W.C. 'Error estimates for adaptive finite element computations', SIAM J. Numer. Anal., Vol. 15, 736-754 (1978)

[2] RANK, E. 'Adaptivity and Accuracy Estimation for Finite Element and Boundary Integral Element Methods', Chapter 4 in: Accuracy estimation and adaptivity for finite elements.BABUSKA, ZIENKIEWICZ,GAGO, ARANTES E OLIVEIRA (eds.) New York, Wiley Interscience (1986)

[3] RANK, E., WERNER,H. 'An adaptive finite element approach for the free surface seepage problem.' Int.J. Numer. Methods Eng., Vol. 23, 1217-1228 (1986)

[4] PLANK,L., STEIN, E., BISCHOFF,D. 'Accuracy and adaptivity in the numerical analysis of thin-walled structures.' Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., Vol. 82, 223-256 (1990)

[5] RUST, W., *Mehrgitterverfahren und Netzadaption für lineare und nichtlineare statische Finite-Elemente-Berechnungen von Flächentragwerken.* Dissertation. Fachbereich Bauingenieur- und Vermessungswesen, Universität Hannover (1991)

[6] ZIENKIEWICZ, O.C., ZHU, J.Z. 'A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis', Int.J. Numer. Methods Eng., Vol. 24, 337-357 (1987)

[7] RANK, E., ZIENKIEWICZ, O.C. 'A simple error estimator in the finite element method', Communications in Applied Numer. Methods, Vol. 3, 243-249 (1987)

[8] RANK, E., ROSSMANN, A. 'Fehlerschätzung und automatische Netzanpassung bei Finite-Element-Berechnungen' Bauingenieur 62, 449-454 (1987)

[9] HARTMANN, F., PICKHARDT, S. 'Der Fehler bei Finiten Elementen', Bauingenieur 60, 463-468 (1985)

[10] BANK, R.E, *PLTMG: A software package for solving elliptic partial differential equations, Vol. 7*,Society for Industrial and applied Mathematics, Philadelphia 1990

[11] A. BYKAT 'Design of a recursive, shape controlling mesh generator', *Int. j. numer. methods eng.*,**19**,1375-1390(1983)

[12] RANK,E., SCHWEINGRUBER,M., SOMMER,M. 'Adaptive mesh generation and transformation of triangular to quadrilateral meshes' zur Veröffentlichung eingereicht in : Int.J. Numer. Methods Eng.